

CHAMPS DE VECTEURS

CHAOS II. LA COURSE DES LEGOS

<http://www.chaos-math.org>

CHAOS est un film mathématique constitué de neuf chapitres de treize minutes chacun. Il s'agit d'un film tout public autour des systèmes dynamiques, de l'effet papillon et de la théorie du chaos. Tout comme **DIMENSIONS**, ce film est diffusé sous une licence **Creative Commons** et a été produit par **Jos LEYS**, **Étienne GHYS** et **Aurélien ALVAREZ**.



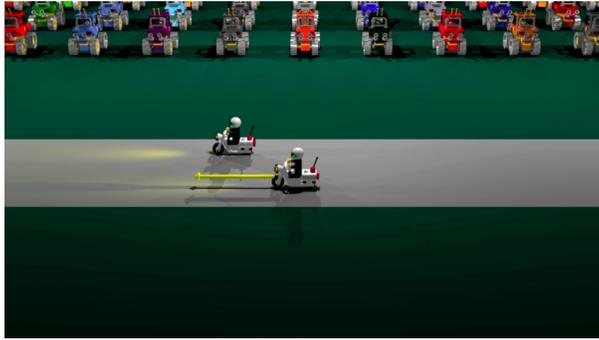
CHAPITRE II.

Avec le calcul différentiel et intégral, **NEWTON** met au point une boule de cristal incroyablement efficace pour prédire l'avenir.

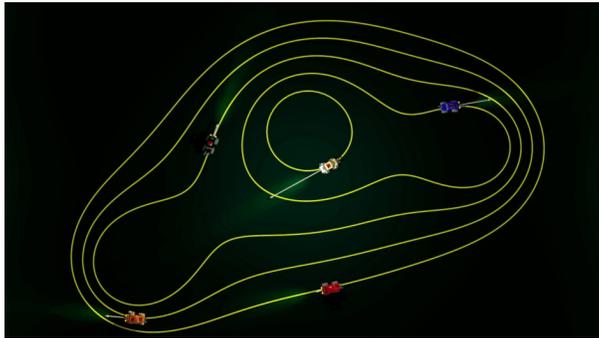


À la fin du XVII^e siècle, **Gottfried Wilhelm LEIBNIZ** (1646-1716) et **Isaac NEWTON** (1643-1727) mettent indépendamment au point un outil mathématique prodigieux : le **calcul infinitésimal** ou calcul différentiel et intégral. Il s'agit

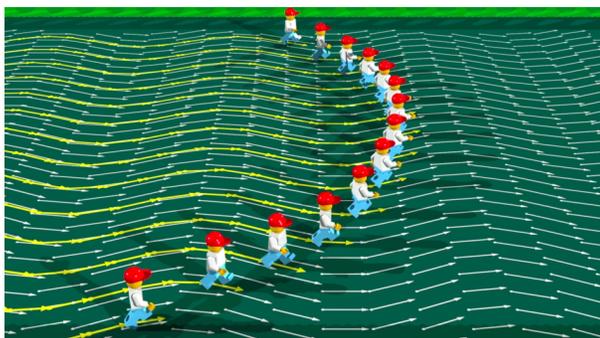
en quelque sorte d'une boule de cristal incroyablement efficace pour prédire l'avenir, dès lors que le mouvement d'un système est régi par une équation différentielle. Ce deuxième chapitre de CHAOS est d'une certaine façon une initiation à ce calcul intégral-différentiel dans le monde des legos.



Comment définir la vitesse d'un lego qui marche ? La vitesse moyenne d'un déplacement est bien entendu le rapport de la distance parcourue par le temps mis pour parcourir cette distance. Pour chaque pas fait par un lego, on peut donc calculer la vitesse moyenne du pas.



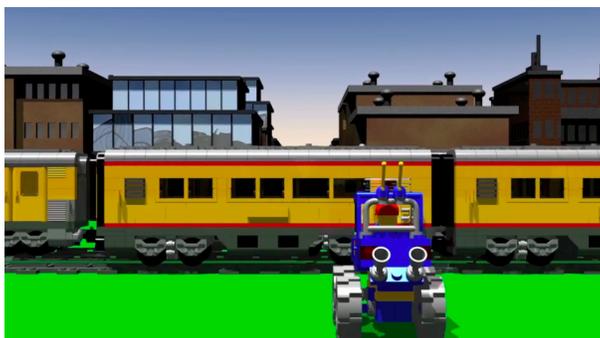
Mais qu'en est-il maintenant pour une voiture qui roule ? L'idée est de considérer le mouvement de la voiture comme une espèce de limite de mouvements saccadés, comme si la voiture faisait des pas si petits qu'on ne les percevait plus, des pas infiniment proches les uns des autres. C'est l'idée de base du concept de dérivation ou calcul différentiel.



Imaginez le cours d'une rivière. En chaque point de la rivière, il est donc possible de calculer la vitesse de l'eau et de l'indiquer sur un petit dessin avec une flèche qui part de ce point, dont le sens indique l'écoulement de l'eau et dont la longueur mesure la vitesse. Une telle flèche s'appelle un vecteur et comme on a un vecteur en chaque point de la rivière, les mathématiciens parlent de **champ de vecteurs**.



Le **calcul intégral**, c'est le jeu inverse au calcul différentiel. Partant d'un champ de vecteurs, il faut construire les trajectoires. Le film montre donc comment les legos, souhaitant se déplacer suivant un champ de vecteurs donné, se retrouvent contraints à suivre leurs destinées. L'énoncé mathématique précis est connu sous le nom de **théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ** et résume le concept de déterminisme : étant donné un champ de vecteurs et une position initiale, il y a une unique trajectoire qui part de ce point et qui est tangente en tout point à ce champ de vecteurs.

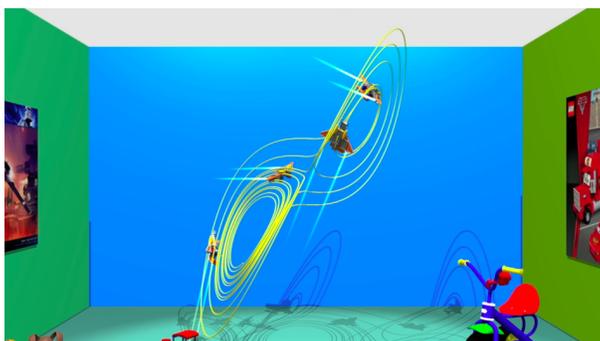


Sur un exemple très simple, le film ne tarde pas à montrer que le déterminisme scientifique tel que formulé précédemment a ses limites. Dès 1879, le physicien **James Clerk MAXWELL** (1831-1879) insistait sur la sensibilité aux conditions initiales dans les phénomènes physiques.



MAXWELL

« Il y a une maxime selon laquelle les mêmes causes produisent les mêmes effets [...]. Mais il y a une autre maxime qu'il ne faut pas confondre : que des causes semblables produisent des effets semblables. Cela est vrai uniquement si de petites variations sur les circonstances initiales produisent de petites variations sur l'état final du système. Cela est vrai dans beaucoup de cas, mais il y en a d'autres pour lesquels une petite variation initiale peut produire de grands changements dans l'état final. »



Finalement, aux commandes de leurs vaisseaux spatiaux, les legos se mettent en quête de se déplacer suivant un champ de vecteurs tracé dans l'espace. Les images suffisent à nous convaincre que la situation peut en effet devenir extrêmement compliquée...

COMMENTAIRES DU CHAPITRE II

Le 26 octobre 1676,
Isaac Newton écrivait une lettre
à son grand concurrent Leibniz.
Il veut évoquer sa plus grande découverte
mais il veut en même temps
la garder secrète.
Alors il envoie un rébus :
« 6a, 2c, d, ae, 13e, 2f, 7i, 3l, 9n, 4o, 4q, 2r, 4s, 8t, 12v, x ».

Leibniz n'a pas décodé ce message
mais les historiens des sciences
ont fini par décrypter
la phrase latine qui se cachait dans l'anagramme :

« Data aequatione quocunq
fluentes quantitates involvente,
fluxiones invenire et vice versa. »

En français :

« Étant donnée une équation
mettant en jeu des variables,
trouver ses dérivées et vice versa. »

Il s'agit du calcul différentiel et intégral :
une boule de cristal incroyablement efficace
pour prédire l'avenir.
Il permet de calculer
le mouvement futur d'un système
lorsqu'on connaît sa situation présente
et les forces qui lui sont appliquées.
On dit qu'on résout une équation différentielle
ou qu'on trouve ses solutions.

Voyons cela dans le monde des legos.
Après tout, le monde mathématique
est un peu un jeu, où tout est plus simple
que dans la vie réelle.
Un monde parfois enfantin.

Les traces de pieds
indiquent les chemins suivis
par les athlètes,

leurs trajectoires.
Supposons que nos bonshommes
fassent des pas à une cadence régulière
mais que ces pas soient parfois grands
et parfois plus petits.
Lorsque le lego va vite,
deux traces consécutives sont éloignées.
Lorsqu'il va lentement, elles sont rapprochées.

La flèche qui joint deux pas consécutifs
indique la vitesse.
Elle est en quelque sorte
la différence des positions
à deux instants consécutifs.
D'où le mot « calcul différentiel ».

Les legos font un cent mètres.
Qui va gagner ?
9'58" ! Bravo !

À vrai dire,
un mouvement est rarement constitué
de pas saccadés.
Vous voyez par exemple ces voitures qui roulent :
elles roulent, elles ne marchent pas.
Quel sens donner à leurs vitesses ?
Une idée consiste à dire qu'après tout
ce film est constitué
de 25 images par seconde,
si bien qu'on peut en effet penser
que la moto fait 25 pas chaque seconde.
Et on peut donc parler de sa vitesse,
comme nous parlions de la vitesse du lego.

Newton considère tout mouvement continu
comme une espèce de limite
de mouvements saccadés,
mais dont les pas deviennent
si petits qu'on ne les perçoit plus,
comme au cinéma.
Calculer la vitesse d'un déplacement,
c'est ce qu'on appelle calculer une dérivée.
C'est le but du calcul différentiel.

Voici quelques mouvements.
Ces flèches qui indiquent la vitesse,
les mathématiciens les appellent des vecteurs.

Maintenant, imaginons le problème inverse.
Vous voyez des flèches dessinées
un peu partout sur le sol.
On parle d'un champ de vecteurs.
Imaginez un champ de blé
mais à la place d'une tige portant le blé,
vous avez un vecteur.

La mission des legos
est de se déplacer avec une vitesse
qui est indiquée par le champ de vecteurs.
Facile, me direz-vous !
Ils regardent sous leurs pieds,
ils y voient un vecteur
qui leur donne leurs vitesses.
Alors ils partent dans cette direction
avec cette vitesse.

Un tout petit instant plus tard,
ils sont arrivés en un nouveau point
avec une nouvelle vitesse.
Alors ils partent dans une nouvelle direction,
et ils recommencent.

La marche à pied, ce n'est pas difficile
il suffit de mettre un pied devant l'autre
et de recommencer.
À vrai dire,
il faudrait expliquer ce que veut dire
« un tout petit instant plus tard ».
Et la réponse de Newton serait
« un instant infiniment proche ».

Nous l'avons vu,
un mouvement continu n'est pas la même chose
qu'une succession de pas.
C'est une limite
quand les pas deviennent de plus en plus petits.
Plutôt que de sautiller comme un lego,
prenez donc une voiture
qui roule de manière continue.

Alors, vous décrivez
ce qu'on appelle une trajectoire :
une courbe partout tangente au champ de vecteurs.

Vous avez un champ de vecteurs dans le plan
et deux points,
qu'on pense comme les positions initiales
des deux motos.
Le théorème de Cauchy-Lipschitz
résume le concept de déterminisme :
il affirme que cela détermine
les trajectoires futures.
Partant de chaque point,
il y a une unique trajectoire
dont la position initiale est le point donné.

Chaque point à sa destinée,
différente pour chacun.
Le lego face à son destin !
Il ne peut que suivre sa trajectoire,
et donc deux trajectoires
ne peuvent jamais se croiser.

Déterminer la trajectoire
à partir de la connaissance
de son champ de vitesse,
c'est le travail du calcul intégral,
qui va ainsi dans le sens opposé
du calcul différentiel.

Et voici un groupe de legos,
bien rangés
comme des petits soldats prêts à partir.
Les voilà en marche.

Vous voyez que le bel ordre initial
a été rompu.
On dit parfois qu'on détermine
le flot du champ,
un peu comme si tous ces personnages
flottaient sur un fleuve,
au fil du courant, chacun suivant son cours.
Pensez au flot de l'humanité,

ces sept milliards de legos glissant sur la Terre,
ou pensez au flot des milliards de milliards
de milliards de molécules de l'atmosphère terrestre.

Voici un exemple tout simple,
presque naïf,
qui va nous montrer une faiblesse du déterminisme.
Regardez ce champ de vecteurs.
Les legos avancent et vous voyez,
ceux qui sont à gauche de la ligne centrale
bifurquent à gauche,
et de même ceux qui sont à droite
bifurquent à droite.
Dans un sens le déterminisme est valide :
chacun suit sa destinée
sur laquelle il n'a aucune prise.
Mais d'un autre côté,
deux legos très voisins
ont des destinées très différentes.
Une toute petite chose
peut changer complètement le futur.

Dans son livre « Matter and Motion »,
paru en 1876,
le physicien Maxwell insiste sur
la sensibilité aux conditions initiales
dans les phénomènes physiques.
Voici ce qu'il écrit :

« Il y a une maxime selon laquelle
les mêmes causes produisent les mêmes effets [...].
Mais il y a une autre maxime
qu'il ne faut pas confondre :
que des causes semblables
produisent des effets semblables.
Cela est vrai uniquement
si de petites variations
sur les circonstances initiales
produisent de petites variations
sur l'état final du système.
Cela est vrai dans beaucoup de cas,
mais il y en a d'autres pour lesquels
une petite variation initiale peut produire
de grands changements dans l'état final. »

Comme par exemple une petite différence
dans la vitesse de la voiture
peut provoquer un accident.
Cette dépendance du futur
aux conditions initiales
n'est que l'un des aspects du chaos.

Mais il y a des situations bien plus complexes.
Imaginez par exemple un champ de vecteurs
qui n'est plus tracé sur le sol
mais dans l'espace.
Par exemple celui-ci
que vous voyez sur des plans
qui reculent progressivement.
Maintenant nos legos ne marchent plus
mais ils volent dans leurs vaisseaux spatiaux.
Et à chaque instant, leurs vitesses
sont données par ce champ de vecteurs.

Voyez ce qui arrive à nos malheureux legos.
Autrement plus chaotique !
Imaginez un lego qui voudrait être devin.
Impossible avec de telles montagnes russes :
ses prédictions ne seraient que des impostures.
Où sera-t-il dans une heure ?
Nul ne pourra jamais le prédire.
S'il est difficile de prévoir l'avenir d'un lego,
alors imaginez l'avenir d'un être humain !

