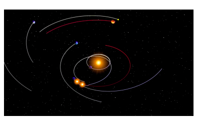
BILLARDS

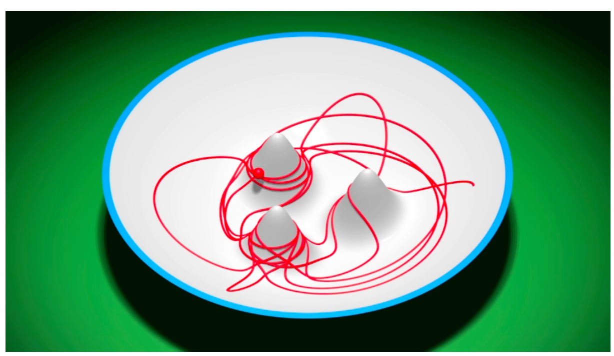
CHAOS V. LE TAUREAU DE DUHEM

http://www.chaos-math.org

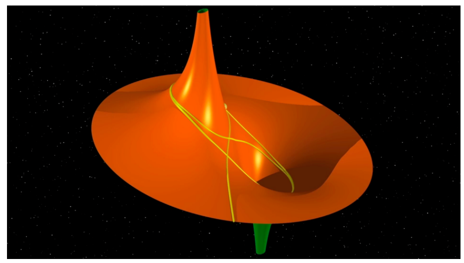
CHAOS est un film mathématique constitué de neuf chapitres de treize minutes chacun. Il s'agit d'un film tout public autour des systèmes dynamiques, de l'effet papillon et de la théorie du chaos. Tout comme DIMENSIONS, ce film est diffusé sous une licence Creative Commons et a été produit par Jos LEYS, Étienne GHYS et Aurélien ALVAREZ.



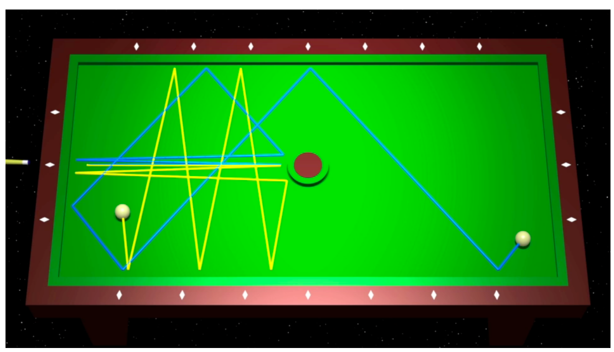
CHAPITRE V.
Comprendre le mouvement des objets célestes, prévoir les collisions entre les planètes, prédire sa propre destinée... un très vieux rêve...



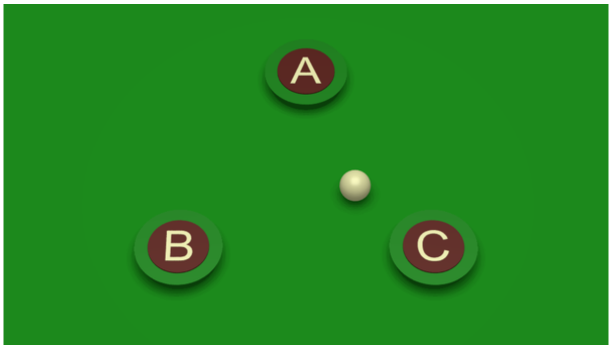
Pour aborder une question aussi complexe que celle du mouvement des corps célestes, il n'est pas déraisonnable de commencer par étudier des situations plus simplistes. Si le mouvement d'une bille roulant sans frottement dans une cuvette ne semble pas trop difficile à comprendre, il en va tout autrement pour une cuvette un peu cabossée... Oui le mouvement devient soudainement très compliqué.



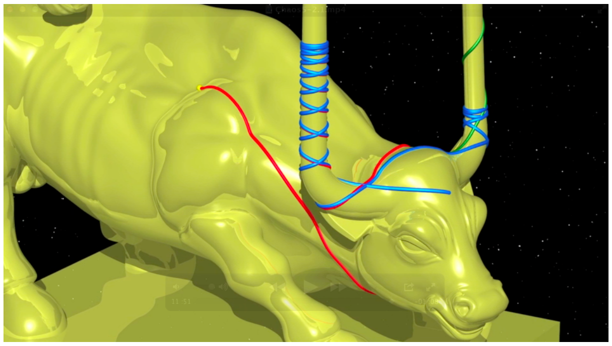
Au début du XX^{e} siècle, le philosophe des sciences Pierre Duhem (1861-1916) se plaît à présenter les travaux du mathématicien Jacques Hadamard (1865-1963), publiés en 1898 dans un article intitulé *Sur les géodésiques des surfaces à courbures opposées*, d'une manière imagée : il s'agit alors de lancer une bille qui roulerait sans frottement sur le front d'un taureau dont on aurait allongé les cornes jusqu'à l'infini. Quelle drôle d'idée !



Dans ce chapitre, on essaie d'expliquer les idées d'Hadamard sur un exemple différent mais finalement assez proche des géodésiques sur les surfaces à courbures opposées : il s'agit du jeu de billard. Que constate-t-on si l'on introduit une sorte de plot circulaire au milieu d'une table de billard ? Que deux billes lancées dans des directions très proches peuvent voir leurs trajectoires devenir très rapidement complètement différentes.

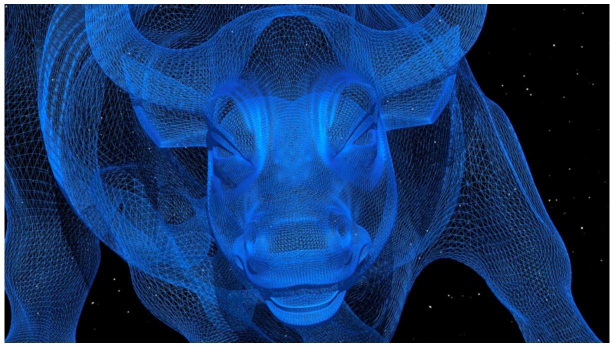


Mais il y a mieux encore. Si l'on introduit trois plots circulaires A, B et C sur la table, alors pour tout mot en ces trois lettres, par exemple ABABCABC, il existe une unique trajectoire périodique qui visite successivement les trois plots dans l'ordre dicté par les lettres. Ce codage des trajectoires à l'aide de mots écrits avec les lettres A, B et C n'est d'ailleurs pas sans rappeler l'écriture des nombres réels...



Duhem poursuit sa description imagée d'une masse matérielle glissant sur le front d'un taureau en ces mots.

> « Il est, d'abord, des géodésiques qui se ferment sur elles-mêmes. Il en est aussi qui, sans jamais repasser exactement par leur point de départ, ne s'en éloignent jamais infiniment ; les unes tournent sans cesse autour de la corne droite, les autres autour de la corne gauche, [...] d'autres, plus compliquées, font alterner suivant certaines règles les tours qu'elles décrivent autour d'une corne avec les tours qu'elles décrivent autour de l'autre corne [...]. Sur le front de notre taureau [...], il y aura des géodésiques qui s'en vont à l'infini, les unes gravissant la corne droite, les autres gravissant la corne gauche [...]. »



Deux géodésiques qui partent dans des directions très proches ont des futurs très différents, comme l'exprime très joliment DUHEM.

> « Si donc un point matériel est lancé sur la surface étudiée à partir d'une position géométriquement donnée, avec une vitesse géométriquement donnée, la déduction mathématique peut déterminer la trajectoire de ce point et dire si cette trajectoire s'éloigne ou non à l'infini. Mais, pour le physicien, cette déduction est à tout jamais inutilisable. »

Appréciez la subtilité : la déduction mathématique est possible alors qu'elle est inutilisable pour le physicien. Entre la théorie et la pratique, il y a tout un monde.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE V

Ah ! qu'on aimerait comprendre
le mouvement des objets célestes.
C'est un vieux rêve...
Certains ne pensent-ils pas lire leurs destinées
dans la position des astres ?

Peut-on prévoir les collisions entre les planètes ?
La gravitation pourrait-elle éjecter
certaines planètes à l'infini ?
Ou, au contraire,
faut-il s'attendre à une stabilité
du mouvement du système solaire ?
Voilà des questions bien délicates.

Comme toujours en maths,
face à un problème trop difficile,
on cherche d'abord une situation plus simple.

Regardez cette cuvette
en forme de parabole.
Si on lance une bille,
elle est soumise à son poids
et à la force de réaction
qui la contraint à rester sur la surface.
On voit que le problème est analogue
à celui d'une planète,
attirée par le Soleil.
Le mouvement semble trop régulier
pour ressembler à un système solaire complexe
avec beaucoup de planètes.

Prenons une cuvette un peu plus compliquée.
La bille est toujours soumise à son poids
et à la force de réaction de la surface.
Le mouvement est vraiment compliqué.

Supprimons le poids de la bille
mais gardons la force de réaction de la surface.
Écoutons plutôt Pierre Duhem,
le philosophe des sciences,
présenter les travaux
du mathématicien Hadamard,
publiés en 1898, dans un article intitulé :
« Sur les géodésiques des surfaces
à courbures opposées ».

« Une masse matérielle glisse sur une surface ;
aucune pesanteur, [...]
aucun frottement ne gêne son mouvement.

Elle décrit une ligne
que les géomètres nomment
une ligne géodésique
de la surface considérée.

Lorsqu'on se donne la position initiale
de notre point matériel
et la direction de sa vitesse initiale,
la géodésique qu'il doit décrire
est bien déterminée.

Imaginons le front d'un taureau,
avec les éminences d'où partent les cornes [...]
et les cols qui se creusent
entre ces éminences ;
mais allongeons sans limite
ces cornes [...],
de telle façon qu'elles s'étendent à l'infini ;
nous aurons une des surfaces
que nous voulons étudier. »

Allonger les cornes à l'infini ?
Voilà bien une idée de mathématicien !
Lancer une bille
sur le front d'un taureau
dont on aurait allongé les cornes à l'infini...

Nous allons utiliser
un exemple différent
mais finalement assez proche
des géodésiques d'Hadamard :
le jeu de billard.

Voici une table de billard rectangulaire.
Je lance une bille...
puis une autre,
presque de la même manière.
Trop simple !
Les deux billes suivent des trajectoires proches.

Une table de billard elliptique ?
Encore trop simple !
Là encore, deux billes qui partent
avec des conditions initiales proches
ont des trajectoires qui restent proches.
C'est un peu comme si nous observions
les géodésiques sur le front d'un taureau
qui n'aurait pas de cornes.

Introduisons une première corne,
un plot circulaire.
Regardez maintenant deux trajectoires proches.
Elles tapent sur le plot,
la première part d'un côté,

la seconde de l'autre.
Leurs futurs deviennent rapidement...
très différents.

Voici un plan infini
où des billes peuvent rouler sans frottement.
Sur ce plan, il y a trois obstacles circulaires :
appelons les A, B et C.
C'est un peu comme si
nous observions les géodésiques
sur une surface à trois cornes.
Posons une bille et lançons-là.
Si on vise bien, la trajectoire peut taper
A puis B puis C puis A puis B puis C etc...
une trajectoire périodique triangulaire.
Y a-t-il d'autres trajectoires périodiques ?

Hadamard démontre un magnifique théorème.
Il affirme que si vous choisissez
n'importe quel mot
écrit avec les trois lettres A, B, C,
avec la condition que deux lettres qui se suivent
soient différentes,
par exemple ABABCABC,
eh bien...
il existe une unique trajectoire périodique
qui visite successivement les plots
dans l'ordre dicté par le mot en question.
Vous voyez la complexité de la situation :
pour chaque mot,
il y a une trajectoire périodique.
Et il y a beaucoup de mots !
Par exemple, le mot ABCBCBCBCBC...
est une trajectoire qui fait semblant
de jouer entre B et C,
et qui, une fois tous les onze rebonds,
va taper le plot A.
Bien sûr, il faut bien viser...
très bien viser !

Cela rappelle les nombres réels.
Certains d'entre eux
ont une écriture décimale périodique,
ce sont les nombres rationnels.

123/999 par exemple c'est
0,123123123...
et 2/7, c'est 0,285714285714285714285714...
Les nombres irrationnels, quant à eux,
ont une écriture décimale
qui n'est pas périodique,
π par exemple.

Eh bien, pour notre billard, c'est pareil.
Certaines trajectoires sont périodiques
et sont décrites par un mot
périodique dans les lettres A,B,C.
D'autres sont décrites
par un mot infini non périodique.
Et puis d'autres enfin
visitent A,B,C un nombre fini de fois
et puis s'en vont à l'infini,
sans jamais revenir.

Observons le taureau de Duhem.

« Il est, d'abord, des géodésiques
qui se ferment sur elles-mêmes.
Il en est aussi qui,
sans jamais repasser exactement
par leur point de départ,
ne s'en éloignent jamais infiniment ;
les unes tournent sans cesse
autour de la corne droite,
les autres autour de la corne gauche, [...]
d'autres, plus compliquées,
font alterner suivant certaines règles
les tours qu'elles décrivent autour d'une corne
avec les tours qu'elles décrivent
autour de l'autre corne [...].
Sur le front de notre taureau [...],
il y aura des géodésiques
qui s'en vont à l'infini,
les unes gravissant la corne droite,
les autres gravissant la corne gauche [...]. »

Imaginez la Lune qui,
après être restée gentiment
à proximité de la Terre,
déciderait, tout à coup,

de partir à l'infini...

« Malgré cette complication,
si l'on connaît avec une entière exactitude
la position initiale d'un point matériel
sur ce front de taureau
et la direction de la vitesse initiale,
la ligne géodésique que ce point
suivra dans son mouvement
sera déterminée sans aucune ambiguïté.
Il en sera tout autrement
si les conditions initiales
ne sont pas données mathématiquement,
mais pratiquement. »

Appréciez la subtilité !
Pas mathématiquement mais pratiquement.

Regardez ces géodésiques qui partent
presque dans les mêmes conditions.
Pendant un bon moment,
elles suivent presque le même chemin
et puis... elles se séparent.
Les géodésiques verte, rouge et bleue
ont des futurs totalement différents.

« Si donc un point matériel est lancé
sur la surface étudiée
à partir d'une position géométriquement donnée,
avec une vitesse géométriquement donnée,
la déduction mathématique
peut déterminer la trajectoire de ce point
et dire si cette trajectoire
s'éloigne ou non à l'infini.
Mais, pour le physicien,
cette déduction est à tout jamais inutilisable. »

Pour l'instant tout cela concerne les géodésiques,
ou les trajectoires de billard.
Cela peut-il s'appliquer
dans la vie de tous les jours ?
Pour le mouvement des planètes par exemple ?

La question de la détermination de mon futur demeure toujours sans réponse.