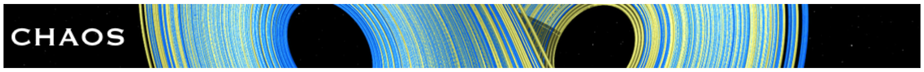


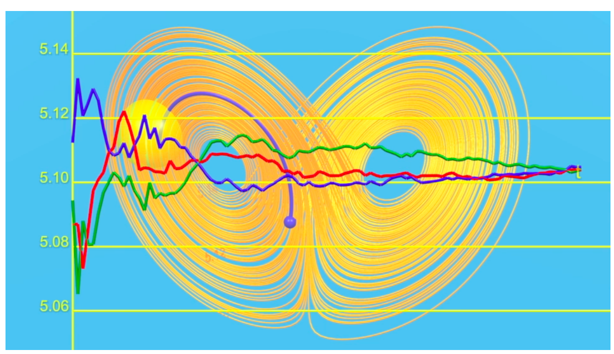

# Statistiques

## Chaos viii. Le moulin de Lorenz

http://www.chaos-math.org

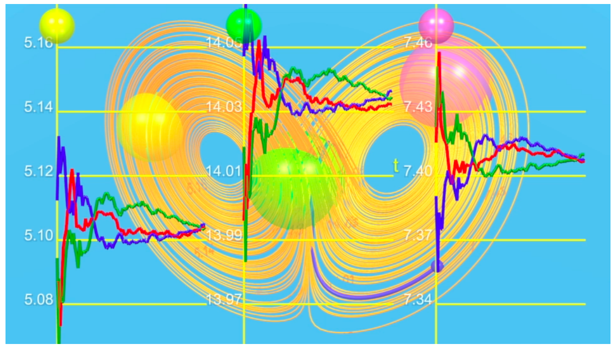
Chaos est un film mathématique constitué de neuf chapitres de treize minutes chacun. Il s'agit d'un film tout public autour des systèmes dynamiques, de l'effet papillon et de la théorie du chaos. Tout comme Dimensions, ce film est diffusé sous une licence Creative Commons et a été produit par Jos Leys, Étienne Ghys et Aurélien Alvarez.

**Chapitre viii.**
Face au problème de la sensibilité aux conditions initiales, Lorenz nous propose de recentrer nos ambitions autour de questions statistiques.

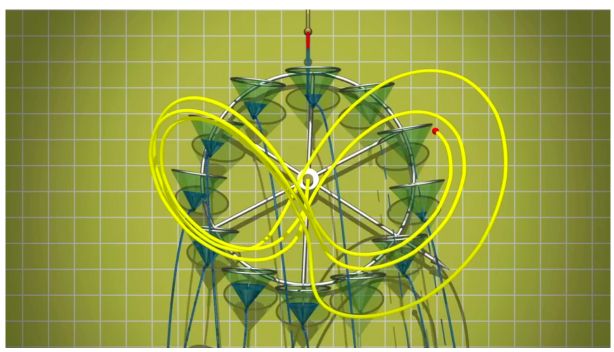



Le but de cet avant-dernier chapitre de Chaos est de montrer qu'il existe une approche positive et constructive face au problème de la dépendance sensible aux conditions initiales. C'est le véritable message de Lorenz (1917-2008) qui, malheureusement, est peu connu du grand public.

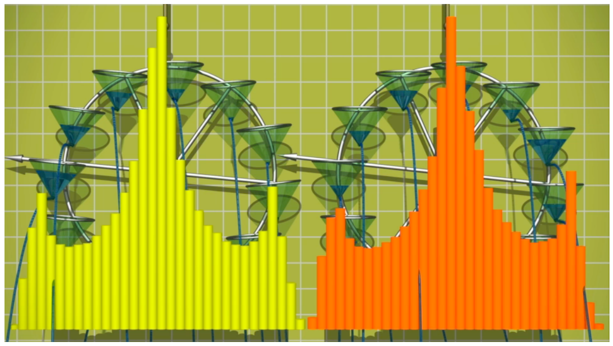
> « Plus généralement, je propose qu'au fil des ans, les petites modifications n'augmentent ni ne diminuent la fréquence des événements climatiques comme les ouragans. La seule chose qu'elles peuvent faire, c'est de modifier l'ordre dans lequel ces événements se produisent. »



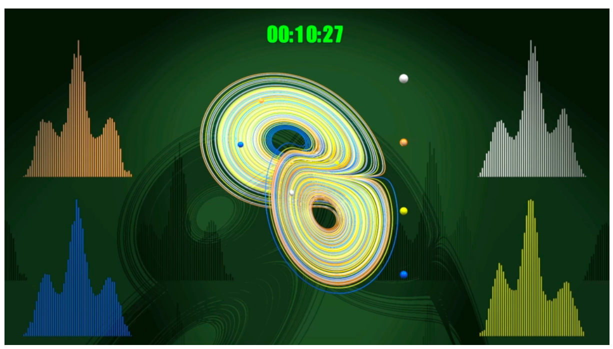

Si l'on considère trois boules dans l'espace, supposées représenter des périodes d'ouragan, de canicule ou de neige, et que l'on comptabilise la proportion du temps passé dans chaque boule pour trois conditions initiales choisies au hasard, l'on remarque que les situations ouragan-neige-canicule alternent de manière incompréhensible, différente pour chaque trajectoire. Mais les proportions passées dans les boules, elles, convergent vers les mêmes limites. LORENZ semble avoir raison !



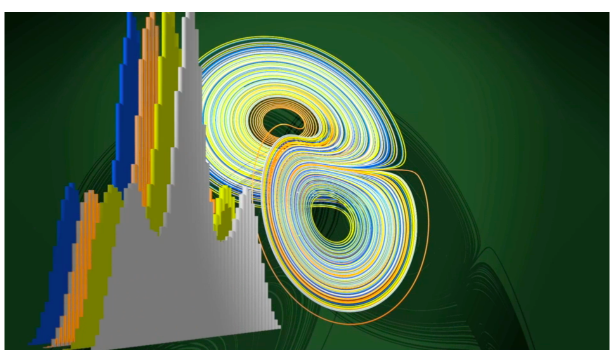
Avec l'aide des physiciens HOWARD et MARKUS, LORENZ a mis au point un vrai système physique, bien loin du vrai phénomène météorologique certes, mais tout de même bien concret : une roue à eau. Trois paramètres décrivent la roue à chaque instant : les deux coordonnées du centre de gravité de la roue ainsi que la vitesse angulaire de celle-ci. Que constate-t-on ? Tout d'abord la dépendance sensible aux conditions initiales. Mais aussi que les trois nombres précédents dessinent une jolie courbe dans l'espace en forme de papillon...



Cherchons à tester les intuitions de Lorenz sur la roue à eau. Lorsqu'on lance deux roues presque dans la même position, en observant 25 fois par seconde leurs vitesses et en reportant le tout sur un diagramme en bâtons, que constate-t-on cette fois-ci ? Qu'il semble bien y avoir indépendance statistique, comme suggéré par Lorenz, les diagrammes en bâtons tendent à devenir identiques.




Lorsque la statistique du futur d'une trajectoire est insensible aux conditions initiales, on dit que la dynamique possède une mesure de Sinaï-Ruelle-Bowen : une mesure SRB. Le but du prévionniste consiste maintenant à déterminer ces statistiques.



L'attracteur de Lorenz possède une mesure SRB. Tout se passe comme si la température évoluait au hasard... mais avec des probabilités bien précises qu'il s'agit maintenant de trouver ! En recentrant ses ambitions autour de questions statistiques, Lorenz nous montre comment contourner le problème de l'effet papillon et ainsi préserver un caractère prédictif à la Science.


## Commentaires du chapitre VIII

Écoutons Edward Lorenz nous préciser
sa conception du chaos en trois points.

« Si un seul battement des ailes d'un papillon
peut engendrer un ouragan,
il en est de même pour les battements
qui précèdent et qui suivent du même papillon,
tout comme des battements d'ailes
des millions d'autres papillons,
sans parler des activités
des innombrables créatures plus puissantes,
en particulier de l'espèce humaine. »

Ce premier point, nous l'avons déjà vu,
est bien compris dans le grand public.

« Si un battement d'ailes d'un papillon
peut engendrer un ouragan,
il peut tout aussi bien l'empêcher. »

Eh oui !
Mais c'est le troisième point
qui est le plus important,
celui qui donne du travail aux scientifiques.

« Plus généralement,
je propose qu'au fil des ans,
les petites modifications n'augmentent
ni ne diminuent la fréquence
des événements climatiques comme les ouragans.
La seule chose qu'elles peuvent faire,
c'est de modifier l'ordre dans lequel
ces événements se produisent. »

Revenons au modèle de Lorenz.
Rappelez-vous que chaque point de l'espace
représente un état de l'atmosphère.
Dans certaines zones, il fait beau
et dans d'autres, c'est l'ouragan.
Supposons que la zone
qui correspond à un ouragan
soit cette petite boule.
Prenons une condition climatique initiale
et observons la trajectoire.
De temps en temps,
un ouragan se produit,
quand la trajectoire pénètre dans la boule.
Comptabilisons la proportion du temps
entre 0 et t pendant lequel un ouragan sévit.

Voyez, il semble difficile de deviner
à quels moments précis
la trajectoire rentre dans la boule.
Mais on constate que le temps moyen
de passage dans la boule
converge vers une limite,
quand t tend vers l'infini.
Ici, environ 5,1%.

Maintenant, prenons une autre condition initiale
et faisons le même calcul.
Eh bien, là encore, on voit que
le temps de passage
tend en moyenne vers une limite.
Mais, oh surprise !
On constate que cette limite
est la même que précédemment, environ 5,1%.
Essayons avec une autre trajectoire.
Ça marche !
On obtient la même limite.
Et pourtant, les trajectoires
sont très différentes,
elles sont sensibles aux conditions initiales,
aux ailes de papillons.

Prenons une autre boule,
rose peut-être et une troisième, verte.
Peut-être les périodes de canicule ou de neige ?
Lorsqu'une trajectoire se développe,
elle traverse les boules dans un certain ordre.

Pour voir ce qui se passe,
considérons trois trajectoires
partant de trois conditions initiales différentes.
Regardez !
Sur les trajectoires,
les situations ouragan-neige-canicule
alternent de manière incompréhensible,
différente d'une trajectoire à l'autre.
Impossible à comprendre.
Mais les proportions de jaune, vert et rose
convergent rapidement vers les mêmes limites :
ici, 5,1 14,03 et 7,4%.
Tout se passe comme si on tirait au hasard
des boules jaune, verte ou rose
avec des probabilités bien précises.

Écoutons à nouveau Lorenz.

« Les petites modifications n'augmentent
ni ne diminuent la fréquence
des événements climatiques comme les ouragans.
La seule chose qu'elles peuvent faire
est de modifier l'ordre dans lequel

ces événements se produisent. »

Voilà un énoncé scientifique !
Le but de la prévision a changé.
Il s'agit maintenant d'essayer de prévoir des moyennes,
des statistiques, des probabilités.
L'idée est que ces statistiques sont peut-être
insensibles aux conditions initiales :
les papillons brésiliens n'y peuvent rien !
Cette hypothèse, non démontrée,
la possible coexistence
d'un chaos météorologique
pour lequel les mouvements futurs
sont sensibles aux conditions initiales,
et d'une stabilité statistique,
insensible aux conditions initiales,
mettra longtemps avant d'être
formulée mathématiquement.

---

Lorenz était probablement un peu gêné
par le côté théorique et pour le moins simpliste
de son atmosphère de dimension 3.
Avec l'aide de deux physiciens,
Howard et Markus,
il a mis au point un vrai système physique,
même s'il est encore un peu simpliste
et bien loin du vrai phénomène météorologique.

Voici un moulin.
Il est constitué d'une roue
autour de laquelle sont suspendus
des seaux d'eau.
Les seaux sont percés au fond
et l'eau s'écoule, d'autant plus vite
que le niveau est élevé.

Tout en haut, on ouvre un robinet
et on observe le mouvement.
Le moulin tourne tantôt à droite,
tantôt à gauche,
et nous semblons totalement incapables
de prévoir dans quel sens il tournera
dans quelques secondes.

Le mouvement semble totalement erratique,
imprévisible... chaotique.

Y a-t-il un rapport entre le moulin
et l'attracteur de Lorenz ?
Choisissons trois nombres pour décrire le moulin,
par exemple la vitesse angulaire
et les deux coordonnées de son centre de gravité.
L'évolution de ces nombres dessine
une courbe jaune dans l'espace.
Incroyable, non ?
Notre moulin évolue comme un papillon !

Changeons imperceptiblement
la position initiale.
Au départ, tous les seaux sont vides
et la roue de gauche est tournée de 2 degrés,
alors que la roue de droite
n'est tournée que de 1,9996 degrés.
Il faudrait un fameux microscope
pour noter la différence.
Oui... on observe bien
la dépendance sensible aux conditions initiales.
Après un certain temps,
les deux moulins ont des comportements
complètement différents.

Voyons si le moulin vérifie
l'affirmation statistique de Lorenz.
Nos deux moulins partent presque
dans la même position.
Observons leurs vitesses,
par exemple 25 fois par seconde,
pendant 5 000 secondes,
donc 125 000 observations.
À chaque observation,
notons la vitesse de rotation de la roue.
Une idée très simple est de faire
ce que font les statisticiens :
un diagramme en bâtons
pour illustrer la distribution.
Nous avons découpé 35 intervalles,
de même longueur,
décrivant la vitesse.
Et nous avons compté le nombre de fois

où la mesure de la vitesse
était dans chacun de ces intervalles.

Voici le résultat :
certains intervalles
semblent plus visités que d'autres.
Nos moulins se comportent
de manières bien différentes :
il y a dépendance sensible
aux conditions initiales.
Mais l'observation est que
les deux suites de données,
bien que différentes,
sont statistiquement identiques.
Les diagrammes en bâtons
tendent à devenir identiques.

Ça marche !
Lorenz semble avoir raison.

---

Lorsque la statistique du futur d'une trajectoire
est insensible aux conditions initiales,
on dit que la dynamique possède une mesure
de Sinaï-Ruelle-Bowen : une mesure SRB.

Le but du prévionniste consiste alors
à déterminer ces statistiques.
Par exemple, observons l'évolution
de la température au cours du temps,
l'une des coordonnées dans l'équation de Lorenz.
On dessine encore un diagramme en bâtons,
comme nous l'avons fait avec le moulin.
Pour chaque intervalle de température,
on note la proportion d'observations
qui tombent dans cet intervalle.
Si on considère quatre trajectoires,
assez différentes les unes des autres,
les diagrammes ont tendance à devenir identiques
après une longue période.
L'attracteur de Lorenz possède une mesure SRB.
Tout se passe comme si la température
évoluait au hasard...
mais avec des probabilités bien précises.

Mais il reste beaucoup à faire
sur le plan mathématique et physique.
Ces probabilités, ces distributions,
il faut bien les trouver
si l'on veut dire quelque chose d'utile !

Espérons avoir rendu justice à Lorenz
qui ne s'est pas contenté de dire
que le futur dépend fortement du présent.
Beaucoup l'avaient dit avant lui.
Mais sa contribution est aussi,
et peut-être surtout,
de montrer qu'en recentrant ses ambitions
autour de questions statistiques,
on peut préserver un caractère prédictif à la Science.