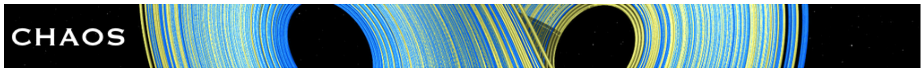


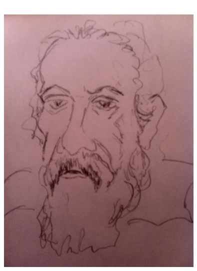
Oscillations

Chaos iv. La balançoire

http://www.chaos-math.org

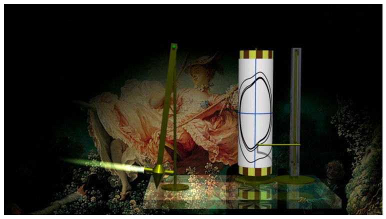
Chaos est un film mathématique constitué de neuf chapitres de treize minutes chacun. Il s'agit d'un film tout public autour des systèmes dynamiques, de l'effet papillon et de la théorie du chaos. Tout comme Dimensions, ce film est diffusé sous une licence Creative Commons et a été produit par Jos Leys, Étienne Ghys et Aurélien Alvarez.

Chapitre iv.
L'idée que les mouvements finissent toujours par se stabiliser, en s'arrêtant ou en oscillant périodiquement, a longtemps dominé la Science.

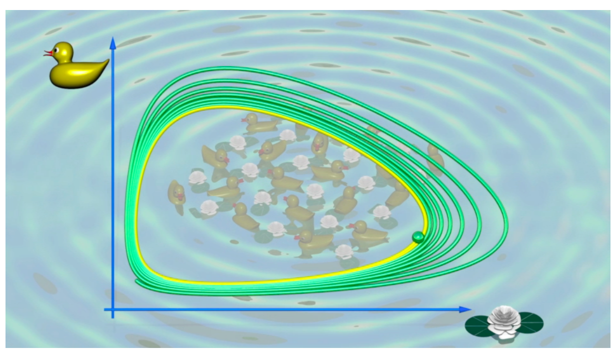


Galilée

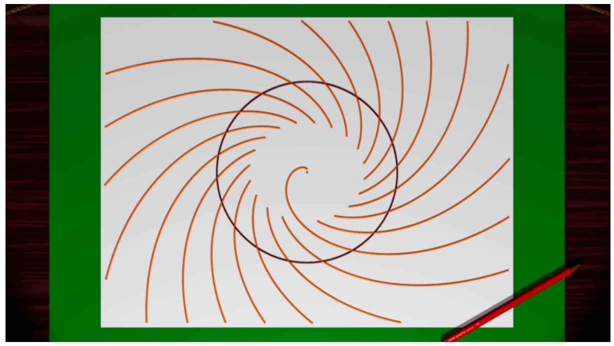
Comment décrire un pendule qui balance ? La position d'un pendule est décrite par un nombre, l'angle que fait ce dernier avec la verticale. Quant à la vitesse du pendule, elle est également décrite par un nombre dont le signe nous indique le sens du balancement. Sans les frottements de l'air, le pendule balancerait indéfiniment, remarque dont Galilée (1564-1642) prend conscience dès son plus jeune âge. Mais à cause de ces fameux frottements, pas de surprise, après un certain temps, un pendule finit par s'immobiliser...



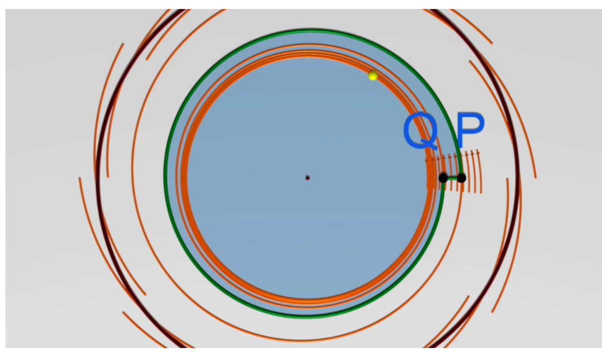
Alors intéressons-nous à une situation plus réaliste d'une balançoire que l'on pousse. Comme nous l'avons dit, les frottements de l'air ralentissent le balancement. C'est alors qu'il faut pousser la balançoire afin de l'accélérer et de la faire monter bien haut. Quelques instants plus tard, elle ralentit à nouveau et il faut lui communiquer une nouvelle impulsion, etc. Si à chaque instant, sont mesurées, et reportées sur un graphique, la position et la vitesse de la balançoire, ce que l'on dessine s'appelle le portrait de phase : une jolie courbe témoigne de la périodicité du mouvement, ce qu'Henri Poincaré (1854-1912) appelle un cycle-limite.



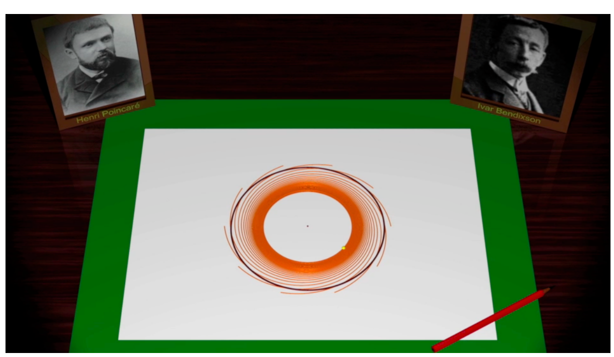
Le modèle de Lotka-Volterra, datant des années 1930, est un autre exemple célèbre qui décrit deux populations se partageant un même territoire. Dans la situation fantaisiste où des canards mangent des nénuphars, on comprend facilement que lorsque les nénuphars sont nombreux, les canards sont bien nourris et prospèrent, si bien que leur nombre augmente. Mais alors, beaucoup de nénuphars sont mangés et les canards se retrouvent finalement avec peu de nourriture, de sorte que leur nombre diminue... Les nénuphars peuvent à nouveau se multiplier et la boucle est bouclée.



L'un des premiers théorèmes de la théorie des systèmes dynamiques, par Poincaré, à la fin du XIX^{e} siècle, a semblé justifier la croyance que les mouvements, peut-être après une courte période de transition, finissent par se stabiliser, soit en s'arrêtant, soit en oscillant périodiquement. Ce théorème concerne les champs de vecteurs dans le plan.



Dans ce chapitre, on essaie d'expliquer l'idée principale de ce théorème de Poincaré-Bendixson. L'idée technique sous-jacente au théorème est qu'il ne peut y avoir de *récurrence* : une trajectoire qui partirait d'un point P du plan peut tout à fait dans un premier temps revenir pas trop loin de P mais, ensuite, elle est condamnée à ne plus y revenir.



Ce théorème, qui marque le début de la théorie *qualitative* des systèmes dynamiques, ne concerne que les champs de vecteurs dans le plan et confirme l'idée que les trajectoires finissent par devenir périodiques ou s'approcher d'une position d'équilibre. Mais POINCARÉ ne tardera pas à découvrir que, pour des champs de vecteurs tracés dans l'espace, la situation peut devenir beaucoup, beaucoup plus riche et jolie. Finis les cycles limites gentils, bienvenue dans le monde du chaos !

COMMENTAIRES DU CHAPITRE IV

Les choses simples d'abord...
Galilée, au XVIe siècle,
observait un lampadaire qui se balançait
et mesurait la période d'oscillation
en prenant son pouls.

Comment décrire un pendule qui balance ?
Son extrémité se déplace sur un cercle
dessiné ici en bleu.
Plaçons ce cercle sur un cylindre
comme ceci.
Chaque point du cercle représente
une position du pendule.
Le point rouge par exemple
désigne la position tout en bas.

La vitesse du pendule,
le vecteur rouge,
est simplement décrite par un nombre,
positif si ça tourne dans un sens,
et négatif si ça tourne dans l'autre.
On peut représenter ce nombre
dans la direction verticale du cylindre.
C'est donc un point du cylindre
qui permet de décrire la position et la vitesse.
La première coordonnée, sur la base,
nous dit où se trouve la balançoire
et la seconde, verticale,
nous dit à quelle vitesse elle tourne.

Alors maintenant,
laissons faire la pesanteur
et observons le balancement.

Attention !
Nous supposons d'abord
qu'il n'y a aucun frottement.
Le balancement continue à l'infini...
Si la position initiale est basse
et si la vitesse initiale n'est pas trop grande,
on se balance périodiquement.
Nous connaissons tous ça.
Si on lance plus fort,
trop fort peut-être...
c'est parti pour un tour.
C'est encore périodique mais pas de la même façon.
Voyez la trajectoire sur le cylindre.
Elle suit un champ de vecteurs.

Observons la situation plus réaliste
où on suppose qu'il y a du frottement.
L'oscillation ralentit peu à peu
et puis finalement...
la balançoire tend à s'immobiliser.
Vous vous souvenez de la théorie d'Aristote :
la balançoire est revenue
à sa position naturelle : en bas !

Observez le champ de vecteurs
correspondant sur le cylindre.
Les trajectoires finissent par tomber en bas,
dans la position d'immobilisme.
On dit que cette position d'équilibre
est un attracteur stable.
Une balançoire avec frottements
n'est donc pas très drôle finalement.
Après un certain temps, on s'arrête...

La balançoire c'est amusant quand on la pousse,
pour qu'elle monte bien haut.
C'est d'ailleurs le point de vue du gentilhomme
représenté par Fragonard
qui semble très intéressé par...
la balançoire...

Plus simplement,
nous allons imaginer que le pendule,

outre la pesanteur et les frottements,
est soumis à une force de poussée,
transmise par une petite tuyère.
Un pendule moderne
muni d'un petit moteur à réaction.

Par exemple exerçons une poussée
mais seulement si la vitesse et l'angle d'inclinaison
ne dépassent pas une certaine valeur.
Si la balançoire part lentement,
elle est poussée,
elle s'accélère, s'accélère,
jusqu'à ce qu'on ne la pousse plus
parce qu'elle va trop vite.
Et alors les frottements font leur œuvre.
Elle ralentit, ralentit...
jusqu'au moment où la poussée
vienne à nouveau à la rescousse, etc.
Finalement,
la balançoire se stabilise
sur un régime périodique.
Poincaré parle de cycle limite.
Le contraire du chaos en quelque sorte.
Le régime périodique...
tout le monde en cadence.

Voyez ce qu'on appelle
le portrait de phase sur le cylindre.
En rouge... le cycle limite.
On voit une trajectoire qui spirale.
Après un certain temps,
on ne la distingue plus
de la trajectoire périodique.

Voici un exemple simple
qui illustre cela en écologie :
le modèle de Lotka-Volterra
datant des années 1930.

Deux populations se partagent un territoire.
D'habitude, on parle de lapins et de renards.
Nous allons imaginer une situation fantaisiste :
des canards et des nénuphars.

Imaginons que les canards mangent des nénuphars.
Quand il y a peu de canards
peu de nénuphars sont mangés.
Les nénuphars peuvent donc prospérer
à grande vitesse.
Quand il y a beaucoup de nénuphars
et peu de canards
ceux-ci sont bien nourris
et leur nombre augmente.
Mais s'il y a beaucoup de canards...
les nénuphars sont mangés.
Si le nombre de nénuphars devient trop bas,
les canards n'ont plus rien à manger
et leur nombre diminue.
La boucle est bouclée
et on recommence.

On représente la situation à un moment donné
par un point du plan :
la première coordonnée représente
le nombre de nénuphars
et la seconde le nombre de canards.
En fait, cela décrit
un champ de vecteurs dans le plan.
Au fil du temps,
on doit donc suivre
une trajectoire de ce champ
et on obtient un cycle limite.
Les populations de nénuphars et de canards
finissent donc par osciller
de manière périodique.

La croyance que les mouvements,
peut-être après une courte période
de transition,
finissent par se stabiliser,
soit en s'arrêtant,
soit en oscillant périodiquement,
dominera longtemps la Science.

L'un des premiers théorèmes
de la théorie des systèmes dynamiques,
par Poincaré,
à la fin du XIXe siècle,

a semblé justifier cela.
Il s'agit des champs de vecteurs
dans le plan.

Imaginez un champ de vecteurs comme ceci.
On ne le connaît pas très bien en fait.
On sait seulement
comment il se comporte près de ce cercle.
Alors prenez une trajectoire
qui entre dans le disque.
Où peut-elle aller ?
Eh bien,
le théorème de Poincaré-Bendixson
affirme qu'il y a deux cas possibles.
Ou bien,
la trajectoire doit s'approcher
très près d'une position d'équilibre,
comme ceci.
C'est ce que nous avons vu
pour le pendule amorti.
Ou bien,
elle doit s'approcher d'un cycle limite.

Comment peut-on démontrer
un tel théorème ?
Voici l'idée principale.
Prenez un point du cercle
et observez sa trajectoire
qui pénètre à l'intérieur.
Stop !
Arrêtons-nous en un point P.
Observons les trajectoires
au voisinage de P.
Est-il possible que la trajectoire
continue son chemin
et revienne dans ce voisinage ?
Supposons par exemple qu'elle y repasse en effet
en un point Q.
Observons l'arc de trajectoire entre P et Q
suivi par le segment QP.
Cela forme une courbe fermée
qui est le bord, d'un certain domaine,
dessiné en bleu.
On le voit,
la trajectoire qui part de Q

pénètre dans le domaine bleu
et elle ne peut plus en sortir.
Elle est piégée.
Pour sortir,
il faudrait qu'elle traverse l'arc de trajectoire PQ.
Mais deux trajectoires
ne peuvent pas se croiser.

Pourquoi ?
Eh bien si deux trajectoires
passaient par le même point,
ce serait en contradiction avec
le théorème de Cauchy Lipschitz :
un point n'a qu'une seule trajectoire.
Ou bien,
il faudrait que la trajectoire qui part de Q
ressorte par le segment QP
mais, le long de QP,
le champ de vecteurs rentre,
il ne sort pas.
Vous voyez donc
que la trajectoire qui part de P
peut bien revenir pas trop loin de P
mais qu'ensuite,
elle est condamnée à ne plus y revenir.
On dit qu'il n'y a pas de récurrence :
c'est l'idée principale
du théorème de Poincaré-Bendixson.

Ce théorème marque le début
de ce qu'on appelle
la théorie qualitative des systèmes dynamiques.
Même si on n'a qu'une connaissance imparfaite
d'un champ de vecteurs,
on peut souvent comprendre
le comportement de ses trajectoires.
Dans le cas du plan,
tout se passe bien.
Les trajectoires deviennent périodiques
à la longue,
ou bien s'approchent
d'une position d'équilibre.

Mais Poincaré ne tardera pas à découvrir

que son théorème n'est valide
que pour les champs en dimension 2,
c'est-à-dire pour les tout petits systèmes.
Dès la dimension 3,
nous verrons que la situation
peut être beaucoup, beaucoup,
beaucoup plus riche... et jolie.
Finis les cycles limites gentils,
bienvenue dans le monde du chaos !