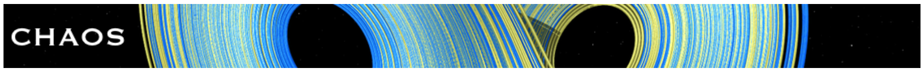


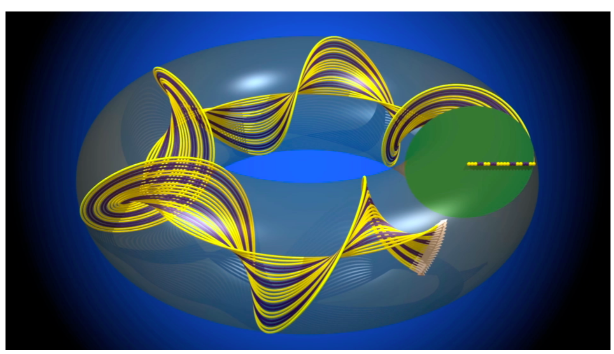
Chaos et fer à cheval

Chaos vi. Smale à Copacabana

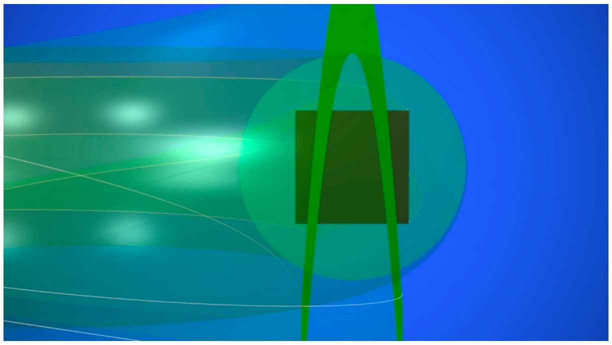
http://www.chaos-math.org

Chaos est un film mathématique constitué de neuf chapitres de treize minutes chacun. Il s'agit d'un film tout public autour des systèmes dynamiques, de l'effet papillon et de la théorie du chaos. Tout comme Dimensions, ce film est diffusé sous une licence Creative Commons et a été produit par Jos Leys, Étienne Ghys et Aurélien Alvarez.

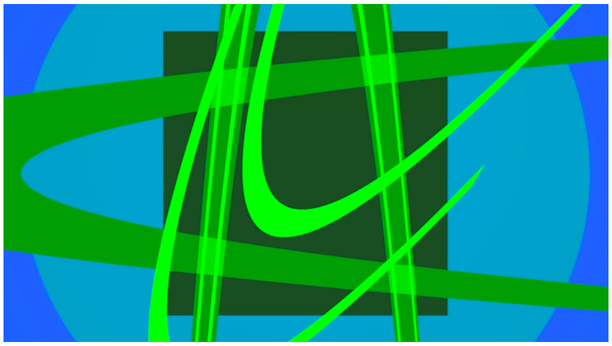
Chapitre vi.
Le fer à cheval : un exemple paradigmatique de système dynamique qui cherche à réduire le chaos à son expression la plus élémentaire.



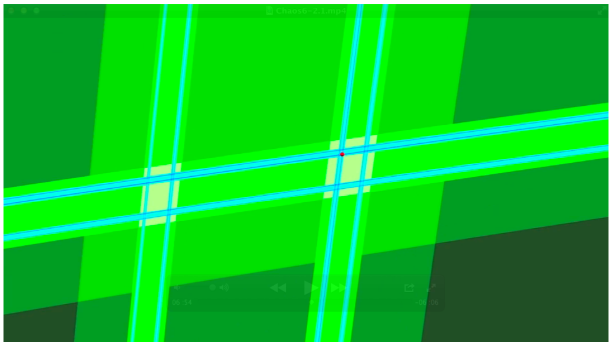
Ce sixième chapitre de Chaos commence par expliquer une vieille idée d'Henri Poincaré (1854-1912). Lorsque l'on étudie un champ de vecteurs dans l'espace, il peut arriver que l'on puisse trouver un petit disque tel que régulièrement les trajectoires rencontrent ce disque. Plutôt que d'étudier l'ensemble d'une trajectoire dans l'espace, on se contente alors d'étudier la suite de points contenue dans le petit disque. Souvent, l'étude est beaucoup plus simple : on est passé d'une dynamique en temps continu à une dynamique en temps discret.



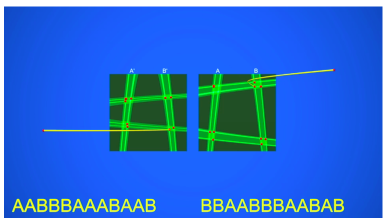
Au début des années 1960, le jeune mathématicien américain Steve SMALE (1930-...) travaillait sur la plage de Copacabana lorsqu'il découvrit un fer à cheval : il s'agit d'une transformation du plan qui associe dilatation, contraction et repliement, transformant un carré en une sorte de fer à cheval.

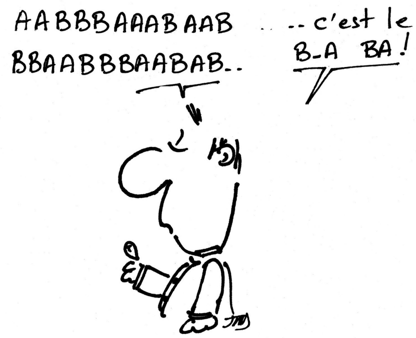


Le dynamique du fer à cheval est extrêmement riche, que ce soit dans le futur ou dans le passé, avec une structure qui se reproduit à l'infini. Le film montre d'ailleurs un zoom dans le fer à cheval pour mieux apprécier sa complexité.



Comment comprendre la dynamique d'un tel objet ? L'idée est de faire comme pour le billard et d'appeler A et B les deux bandes verticales. La chose étonnante est qu'on a presque les mêmes résultats qu'HADAMARD avec ses géodésiques et le billard. Pour chaque suite finie de A et de B, même en s'autorisant des répétitions, comme par exemple BABB, il existe un point périodique qui suit exactement cet itinéraire. Et ça marche même pour des suites infinies ! N'est-ce pas incroyable ? Tout est possible... un beau slogan pour le chaos.





Mais il y a mieux encore. SMALE démontre que le fer à cheval est stable. Le déformer légèrement ne détruit pas la richesse de sa dynamique interne : la sensibilité des trajectoires aux conditions initiales est bien présente, indestructible. Les mathématiciens précisent tout ceci sous le concept de *stabilité structurelle*, ce qu'illustre le film en montrant les dynamiques de deux fers à cheval côte à côte presque identiques.

La coexistence du chaos, et donc de l'instabilité des trajectoires individuelles, avec la stabilité structurelle, une propriété globale, est un fait absolument remarquable.

COMMENTAIRES DU CHAPITRE VI

Au début des années 1960,
le jeune mathématicien américain Steve Smale

travaillait sur la plage de Copacabana
lorsqu'il fit une découverte.
Il découvrit un fer à cheval.
Bien sûr, pas dans le sable !
En fait, son fer à cheval,
comme il se doit,
est un objet mathématique abstrait.
C'est encore une idée simple
qui cherche à réduire le chaos
à son expression la plus élémentaire.

Il faut d'abord expliquer une vieille idée
qui remonte à Poincaré.

Voici un champ de vecteurs dans l'espace.
Une trajectoire qui part de ce disque
fait un tour
et puis revient le traverser,
puis fait un autre tour,
et ainsi de suite.
Pour chaque point x du disque,
on peut observer la trajectoire qui en part,
et attendre qu'elle vienne taper
à nouveau sur le disque,
en un autre point $T(x)$.
Quelques secondes plus tard,
ce nouveau point est de nouveau transformé par T :
c'est un troisième point $T(T(x))$,
et ainsi de suite.
À chaque retour, le point est transformé par T.

Au lieu d'étudier la trajectoire dans l'espace,
on étudie une suite de points dans le disque :
c'est plus facile à dessiner.
On dit qu'on a remplacé
la dynamique du champ en temps continu
par la dynamique de la transformation
en temps discret : 0, 1, 2, 3, etc.
Souvent, c'est beaucoup plus simple à comprendre.

Ici, la transformation T est une rotation
d'un tiers de tour.
La trajectoire centrale correspond

au point fixe de la rotation : l'origine.
Les autres trajectoires
sont également périodiques
mais il leur faut trois fois plus de temps
pour revenir au point de départ :
la rotation tourne d'un tiers de tour.

Ici, la transformation T est une similitude.
Les trajectoires ne sont plus périodiques,
au contraire, elles s'approchent
en spiralant autour de la trajectoire centrale.
La trajectoire périodique centrale est stable.

Et voici une trajectoire instable.
La transformation T écrase le petit chat
dans sa largeur
et l'étire dans sa hauteur.
Le centre est un point fixe
et sa trajectoire est donc périodique.
Vous voyez que les trajectoires situées
sur l'axe horizontal
s'approchent du point fixe
alors que celles qui sont sur l'axe vertical
s'en éloignent.
Pauvre petit chat !

Alors, passons au fer à cheval.

Regardez comment ce carré
se déforme au cours du temps.
La transformation T associe
une dilatation, une contraction
mais aussi un repliement.
Quand le carré est revenu
sur le disque initial,
il a pris la forme d'un fer à cheval.

Observons maintenant
le comportement du carré
quand on remonte le temps,
par la transformation inverse :
une dilatation, une contraction, un repliement
mais tout cela dans l'autre sens.

Essayons d'envisager l'avenir et le passé du carré.
Après un tour, nous l'avons vu,
il devient un fer à cheval.
Après un tour à l'envers, vers le passé,
il devient un fer à cheval,
tourné d'un quart de tour.
Les deux petites bandes verticales
que vous voyez à l'intersection
du carré et du fer à cheval
sont à leur tour compressées,
dilatées et repliées.

On a le même comportement dans le passé.
Et toute cette structure se reproduit à l'infini.
Un peu compliqué ce fer à cheval !
Comment comprendre sa dynamique ?

Appelons A la zone suivante
et B celle-ci.
Alors, la chose étonnante
est qu'on a presque les même résultats
qu'Hadamard avec ses géodésiques et le billard.
Pour chaque suite finie de A et de B,
même en s'autorisant des répétitions,
comme par exemple BABB,
il existe un point périodique
qui suit exactement cet itinéraire.
Dans l'exemple, c'est un point de B
qui saute dans A, qui saute dans B,
qui saute dans B et qui revient au point de départ.

Voici le seul point de A
qui reste toujours dans A :
c'est un point fixe.

Ce point fixe est dans B.

Voici celui qui alterne entre A et B.

Mais de la même manière
que pour le billard,
on ne se limite pas aux suites finies.
Donnez-moi une suite infinie de votre choix,
BBAABBBAABABA...

eh bien, il existe un point
qui suit cet itinéraire dans son futur.

Quand on y pense,
c'est incroyable !
Toutes les vies futures envisageables
sont réalisées par au moins un être humain...
oops... je voulais dire par un point !
Il n'y a pas de prévision possible
puisque tout est possible.
Le libre-arbitre retrouvé !
Tout est possible...
Voilà un beau slogan pour le chaos.
Merci M. Smale.

Smale prend conscience
qu'il n'est pas toujours nécessaire
de connaître exactement les choses
pour les comprendre.
Une image déformée suffit souvent
pour reconnaître un visage.

Il montre que le fer à cheval est stable.
Attention !
Cela ne veut pas dire
que les trajectoires sont stables.
Au contraire, il y a une grande sensibilité
des trajectoires aux conditions initiales.
Il s'agit par contre de ce qu'on appelle
la stabilité structurelle.
Déformez-le... vous le reconnaîtrez encore.

Regardez !
À droite, le fer à cheval initial.
À gauche, un autre fer à cheval,
légèrement modifié,
est en train de se former.
Après tout, lorsqu'on allonge le carré
pour en faire un rectangle,
pour ensuite le replier en forme de fer à cheval,
on peut le faire de plusieurs façons.

C'est un peu analogue à une situation

où on étudierait deux systèmes solaires
dont les planètes auraient des masses
légèrement différentes.
Deux fers à cheval presque identiques.

On peut faire exactement
la même chose que nous avons faite
avec le fer à cheval initial,
et dessiner des zones A' et B' de la même manière.
Et on peut démontrer, de la même manière,
que les trajectoires de ce nouveau fer à cheval
sont encore décrites par des suites de A' et de B'.
Ainsi donc, le fer déformé
est tout aussi chaotique que le fer initial.
Le chaos est présent,
et bien présent, indestructible.

En fait, Smale montre
que les mouvements des deux fers
sont en quelque sorte identiques.
Regardez,
ces deux trajectoires, à droite et à gauche,
suivent la même chorégraphie.
Elles visitent les mêmes AA' et les mêmes BB'.
À toute trajectoire du premier fer,
on peut associer une trajectoire
du second fer et réciproquement.

C'est en ce sens
qu'il y a stabilité de la structure :
on a beau déformer le fer à cheval,
non seulement il reste chaotique,
mais il présente la même dynamique qu'auparavant.
Les trajectoires individuelles sont instables
mais la dynamique, dans sa globalité, est stable.

Avec son sens de la formule,
Poincaré explique, au début du vingtième siècle,
comment il est possible de comprendre une dynamique
même si on ne la connaît pas très bien.

« Vous me demandez de prédire
les phénomènes qui vont se produire.

Si, par malheur, je connaissais
les lois de ces phénomènes,
je ne pourrais y arriver
que par des calculs inextricables
et je devrais renoncer à vous répondre ;
mais comme j'ai la chance de les ignorer,
je vais vous répondre tout de suite.
Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire,
c'est que ma réponse sera juste. »

La coexistence du chaos,
et donc de l'instabilité des trajectoires individuelles,
avec la stabilité structurelle, une propriété globale,
est un fait absolument remarquable.
Je suis instable
mais le monde qui m'entoure est stable.
Rassurant ;-).