

ATTRACTEURS ÉTRANGES

CHAOS VII. L'EFFET PAPILLON

<http://www.chaos-math.org>

CHAOS est un film mathématique constitué de neuf chapitres de treize minutes chacun. Il s'agit d'un film tout public autour des systèmes dynamiques, de l'effet papillon et de la théorie du chaos. Tout comme **DIMENSIONS**, ce film est diffusé sous une licence **Creative Commons** et a été produit par **Jos LEYS**, **Étienne GHYS** et **Aurélien ALVAREZ**.



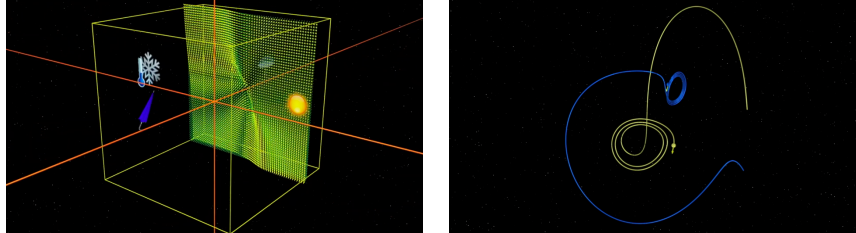
CHAPITRE VII.

« Prédicibilité : le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? »
Titre d'une conférence de LORENZ en 1972.

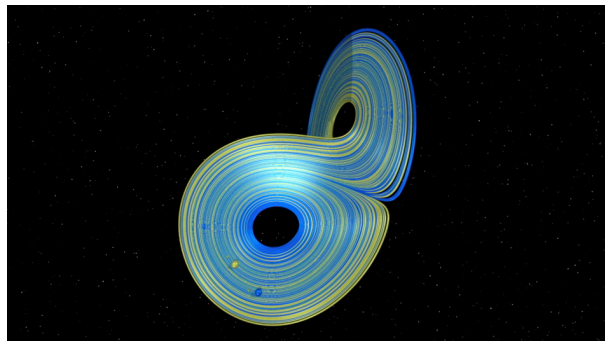


En 1963, **Edward LORENZ** (1917-2008), qui s'intéressait au problème de la **convection** dans l'atmosphère terrestre, simplifia drastiquement les équations de **NAVIER-STOKES** de la mécanique des fluides, réputées pour leur inextricable

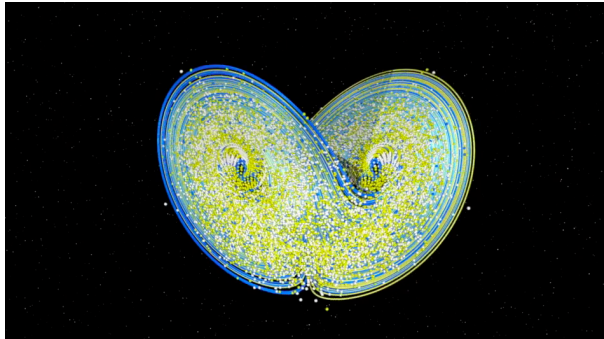
complexité. Le modèle atmosphérique de LORENZ est ce que les physiciens appellent un *modèle-jouet* : bien qu'il n'ait probablement pas grand-chose à voir avec la réalité, LORENZ ne tarda pas à réaliser qu'il s'agissait d'un modèle mathématique très intéressant. Les équations de LORENZ ne font intervenir que trois nombres x, y et z , de sorte que chaque point (x, y, z) de l'espace symbolise un état de l'atmosphère et l'évolution consiste à suivre un champ de vecteurs.



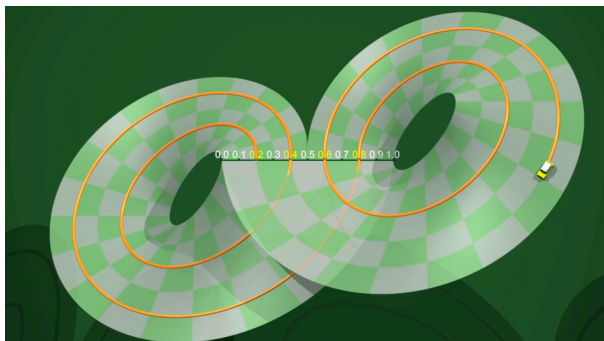
Comprendre l'évolution du temps qu'il fait dans l'atmosphère virtuelle de LORENZ revient à suivre une trajectoire de ce champ de vecteurs. N'oublions pas qu'il s'agit d'un modèle-jouet et que l'objectif est d'essayer de comprendre les grandes lignes d'un comportement complexe.



Si l'on considère deux atmosphères presque identiques, donc représentées par les centres de deux petites boules extrêmement proches, rapidement les deux évolutions se séparent de manière significative : les deux atmosphères deviennent complètement différentes. LORENZ a pu constater sur son modèle la dépendance sensible aux conditions initiales, le chaos.



Mais plus intéressant, partant d'un grand nombre d'atmosphères virtuelles, bien qu'un peu folles et bien peu prévisibles, les trajectoires semblent toutes s'accumuler sur un même objet en forme de papillon, popularisé sous le nom d'*attracteur de Lorenz*, un attracteur bien étrange...



Comprendre l'attracteur de LORENZ a un véritable enjeu scientifique. À quoi ressemble-il précisément ? Comment se comporte sa dynamique interne ? C'est pour essayer de répondre à ces questions que, dans les années 1970, BIRMAN, GUCKENHEIMER et WILLIAMS ont proposé un modèle simple que l'on peut construire à l'aide de bandes de papier : comme pour le fer à cheval, l'on est passé d'une dynamique en temps continu à une dynamique en temps discret.



Il aura fallu attendre 2001 pour que le mathématicien Warwick TUCKER démontre que les bandes de papier décrivent bien le mouvement de Lorenz : pour chaque trajectoire dans l'attracteur de LORENZ, il existe une trajectoire sur les bandes de papier qui se comporte exactement de la même manière. Même si tout ceci reste encore très simpliste par rapport au vrai phénomène météorologique, c'est une illustration du fait que les choses simples, les mathématiciens aiment !

COMMENTAIRES DU CHAPITRE VII

Quand on observe le mouvement
de l'atmosphère,
on comprend vite qu'il est
infiniment plus complexe
que celui du système solaire.
L'atmosphère est un fluide
qui possède, en chaque point de la Terre
et à chaque altitude,
une vitesse, une densité,
une pression, une température, etc.
Tout cela varie au cours du temps.
Il est bien sûr impensable
de connaître toutes ces quantités,
en nombre infini.
C'est un peu comme si nous étions
dans un espace de dimension infinie.
Pour y comprendre quelque chose,
il faut faire des approximations.

En 1963, Edward Lorenz
simplifia, simplifia,
simplifia encore le problème.
Il le simplifia tellement
que rien ne garantit que son équation
a quelque chose à voir
avec la réalité.
Son modèle atmosphérique
se réduisait seulement à trois nombres x, y, z
et l'évolution de l'atmosphère
à une toute petite équation.
Chaque point (x, y, z) de l'espace
symbolise un état de l'atmosphère
et l'évolution consiste à suivre
un champ de vecteurs.

Par exemple,
mais c'est un exemple seulement,
la première coordonnée pourrait
représenter une température,
la seconde, la vitesse du vent
et la troisième, l'humidité.
Ici, il fait froid,
le vent souffle et il pleut.
Là, c'est le contraire.

Quand on suit une trajectoire du champ,
on suit l'évolution du temps qu'il fait.
Le prévisionniste ne fait donc que
résoudre une équation différentielle.

Lorsque Lorenz observa son modèle,
il vit ceci.
Tout cela a-t-il quelque chose à voir
avec la vraie météo ?
Pas clair du tout !
C'est ce que les physiciens
appellent souvent un modèle-jouet,
pour essayer de comprendre
les grandes lignes
d'un comportement complexe.
En fait, c'est plutôt ce genre de graphique
que Lorenz observait
puisque l'ordinateur dont il disposait,
en 1963,
était bien primitif.

Considérons deux atmosphères
représentées par les centres de ces deux boules,
extrêmement proches,
deux atmosphères presque identiques,
et observons leurs futurs.
Au début, les deux évolutions
restent indiscernables.
Mais ensuite, elles se séparent
de manière significative :
les deux atmosphères deviennent
complètement différentes.
C'est le chaos : la dépendance sensible
aux conditions initiales.

En 1972, Lorenz devait présenter
ses travaux dans un colloque prestigieux.
Mais il tardait à envoyer
le titre de sa conférence.
Alors l'organisateur, pressé d'envoyer
le programme aux participants,
choisit lui-même le titre :
« Prédicibilité : le battement d'ailes
d'un papillon au Brésil
peut-il provoquer une tornade
au Texas ? »

L'effet papillon venait de naître.
Il est malheureusement trop rare
qu'un concept mathématique
puisse pénétrer dans le grand public.
Quelle belle image poétique
que celle du petit papillon, si fragile,
ayant une influence sur le monde !
L'idée rencontra un vif succès
et se modifia peu à peu.
Il s'agit toujours d'un papillon
mais il vient parfois d'Afrique
ou de Chine.
Et il est responsable de catastrophes
à New-York... ou à Chicago.
Intéressant...

Le cinéma, la littérature, la musique
s'approprièrent l'idée.
On ne compte plus les films
qui sont fondés sur ce principe.
Beaucoup d'émotion dans Babel,
ce film d'Alejandro González Iñárritu,
sorti en 2006.
Un coup de feu éclate au Maroc,
un incident sans importance
mais qui va changer la vie
d'un couple d'américains,
d'une nourrice mexicaine,
d'une adolescente japonaise...
Tout un jeu de petits effets
et de grandes conséquences.

Une réflexion sur la destinée humaine,
soumise au hasard ou à la nécessité.

Hélas, ce n'est qu'une moitié
du message de Lorenz
qui est passée dans le public.
La théorie du chaos
peut-elle se limiter à l'affirmation
qu'il est impossible de prévoir
le futur en pratique ?
Comment un scientifique pourrait-il se contenter
d'un tel constat d'échec ?
Le message de Lorenz
est bien plus riche.

Voici deux trajectoires
du système de Lorenz :
une bleue et une jaune
qui ne partent pas nécessairement
de conditions initiales proches.

Effaçons... disons les dix premières
secondes du mouvement
et observons la suite.
Que constate-t-on ?
Que les trajectoires sont en effet
très différentes,
elles semblent un peu folles
et bien peu prévisibles.
Mais elles s'accumulent
sur le même objet en forme de papillon
qui semble ne pas dépendre
de la position initiale.
Elles semblent attirées par ce papillon.
C'est pour cette raison qu'on parle de
l'attracteur de Lorenz :
un attracteur bien étrange.

Voilà un phénomène scientifique positif,
qui n'est malheureusement pas
aussi célèbre que l'effet papillon.
Au lieu d'observer deux trajectoires,
observons-en beaucoup plus.

Regardez toutes ces boules
qui sont autant d'atmosphères idéalisées.
Après un certain temps,
elles se sont toutes accumulées
sur le même papillon.
Un bien bel objet
qu'on ne se lasse pas de regarder.

Voilà de vrais problèmes
pour les mathématiciens
et les scientifiques en général.
Au lieu de décrire le futur
d'une condition initiale donnée,
nous savons que c'est illusoire,
nous allons essayer de décrire l'attracteur.
À quoi ressemble-il ?
Comment se comporte la dynamique interne ?

Dans les années 1970,
Birman, Guckenheimer et Williams
ont proposé un modèle simple
pour essayer de comprendre
l'attracteur de Lorenz.
Voici une bande de papier.
Plions, coupons et recollons.
Voilà un objet bien singulier dans l'espace.
Plaçons-nous sur la ligne de départ.
C'est parti !
On roule, et quelques instants plus tard,
on est de retour sur la ligne de départ.
Mais on se retrouve sur un autre point
d'où part un nouveau chemin.

La position sur la ligne de départ
est décrite par un nombre x
compris entre 0 et 1.
En 0, on est à gauche,
en 0,5 au milieu et en 1, à droite.
Si on part du point x ,
le point de retour est $2x$ si $x < 0,5$
et $2x - 1$ si $x > 0,5$.
Autrement dit,
lorsque le mobile se déplace,
les points où il rencontre la ligne de départ

sont doublés à chaque tour,
sauf qu'il faut parfois retrancher 1
si le résultat est plus grand que 1.

C'est un peu comme pour le fer à cheval :
on a remplacé une dynamique
en temps continu
par une dynamique en temps discret :
les passages successifs
sur la ligne de départ.

Voyez !
On part de $1/3$,
on arrive en $2/3$,
puis en $4/3$ mais il faut retrancher 1,
ce qui donne $1/3$:
nous sommes revenus au point de départ
après deux tours.
Nous avons une trajectoire périodique
de période 2.
Ici, une trajectoire périodique...
de période 18.

Une trajectoire périodique
passe successivement
par les oreilles gauche et droite
en suivant une certaine suite.
Eh bien, on peut montrer
que toutes les suites sont possibles.
Bien sûr, il n'y a pas
que des trajectoires périodiques.
Quelle que soit la suite infinie
de gauche et de droite,
il existe une trajectoire
qui suit cette destinée.

Quel est le rapport entre le modèle de Lorenz
et celui des bandes de papier ?
Eh bien, il a fallu attendre 2001
pour que le mathématicien Tucker
démontre que les bandes de papier
décrivent bien le mouvement de Lorenz.
Pour chaque trajectoire

dans l'attracteur de Lorenz,
on peut trouver une trajectoire
sur les bandes de papier
qui se comporte exactement
de la même manière.

La compréhension du mouvement
de l'atmosphère
se ramènerait-elle à multiplier
sans cesse par 2
un nombre compris entre 0 et 1
et à retrancher 1
si le résultat est plus grand que 1 ?
Bien sûr que non !
Tout cela est encore trop simpliste
mais c'est une illustration du phénomène.
Les choses simples ?
Les mathématiciens aiment !

Pourquoi l'effet papillon
a-t-il un tel succès ?
Peut-être parce qu'il restaure
notre liberté individuelle.
Le déterminisme froid légué par Newton
pouvait mener à une espèce de fatalisme.
Le papillon de Lorenz affirme que,
si petits que nous soyons,
nous pouvons avoir une influence sur le monde.
Bonne nouvelle pour nous !

