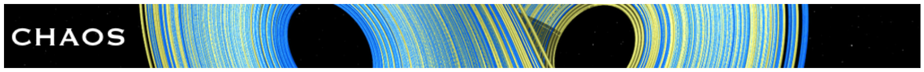
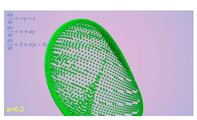


Chaotique ou pas ?

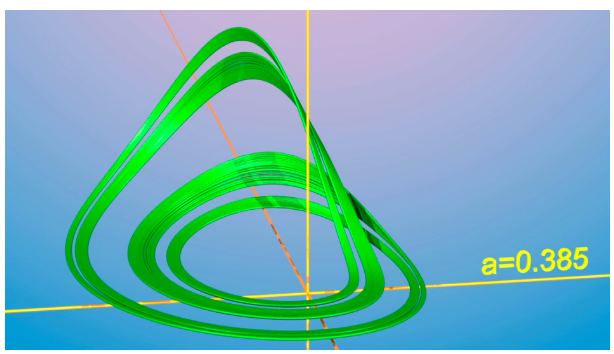
Chaos ix. La recherche aujourd'hui

http://www.chaos-math.org

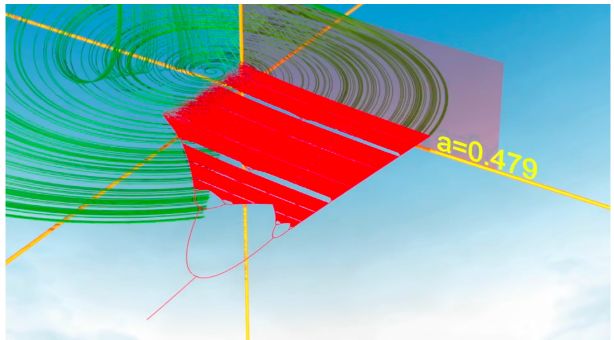
Chaos est un film mathématique constitué de neuf chapitres de treize minutes chacun. Il s'agit d'un film tout public autour des systèmes dynamiques, de l'effet papillon et de la théorie du chaos. Tout comme Dimensions, ce film est diffusé sous une licence Creative Commons et a été produit par Jos Leys, Étienne Ghys et Aurélien Alvarez.



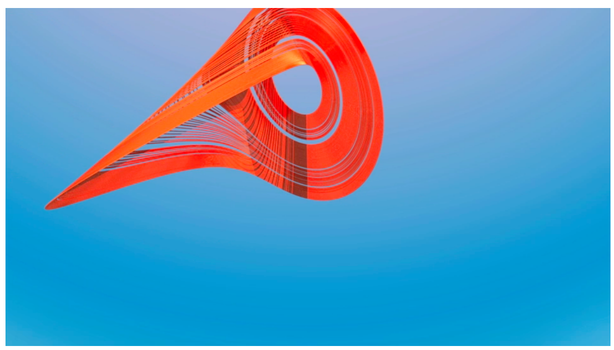
Chapitre ix.
Guidés par des conjectures précises formulées par Palis, les mathématiciens essaient de comprendre les champs de vecteurs en général.



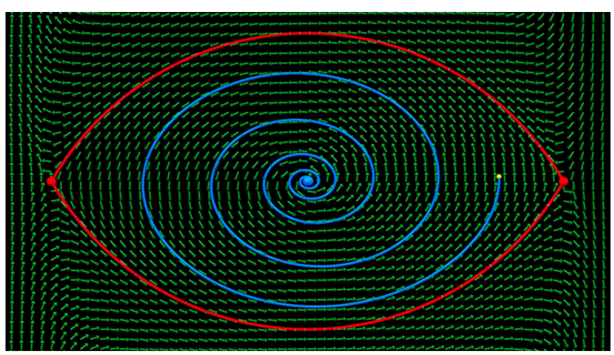
Il y a beaucoup de sortes de dynamiques. Certaines sont compliquées, d'autres non. Pour mieux comprendre tout cela, l'on peut partir d'un champ de vecteurs dans l'espace qui dépend d'un paramètre a et faire évoluer ce paramètre. Tantôt la dynamique est simple, tantôt elle devient compliquée. Comment comprendre ces bifurcations ? Quel est le comportement le plus fréquent dans la nature ?



Voilà de beaux problèmes pour les mathématiciens. Et lorsque l'on regarde la trace dessinée par l'attracteur sur un plan, quand le paramètre a varie, cela produit une dentelle que l'on appelle un diagramme de bifurcation. Joli mais pas facile à comprendre !

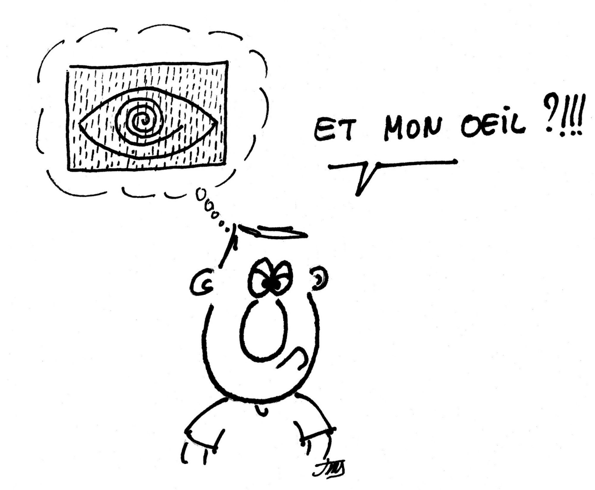


Bien sûr, le mathématicien cherche à établir des résultats qui sont toujours valables. Mais bien souvent, il commence par observer des exemples et nourrit secrètement l'espoir que ce qu'il voit sur un exemple simple pourrait être réalisé en toute généralité...

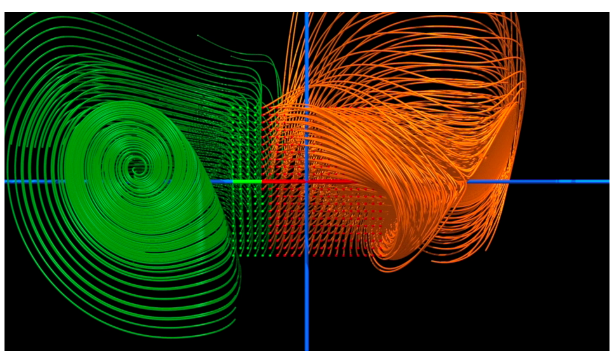


Comme nous l'avons vu, la proportion du temps passé dans une boule par une trajectoire converge vers une limite indépendante de la condition initiale :

c'était l'idée de Lorenz (1917-2008) et des mesures de Sinaï-Ruelle-Bowen. Est-il raisonnable d'espérer que ceci puisse être toujours vrai ?



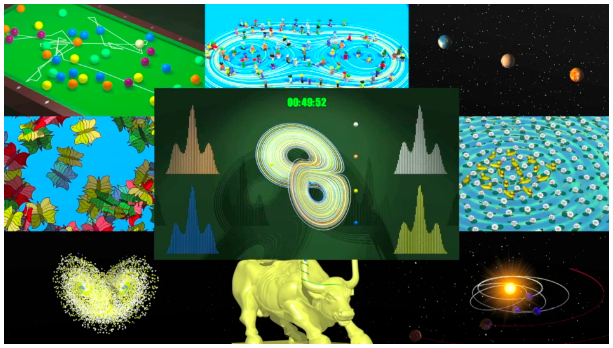
Hélas non, comme le montre un tout petit exemple découvert par Rufus Bowen (1947-1978). Mais le film nous montre qu'il n'y a aucune raison d'abandonner trop tôt cette idée car l'exemple de Bowen est en fait très particulier.



Dans les années 1990, le mathématicien brésilien Jacob Palis (1940-...) a formulé tout un ensemble de problèmes qui, s'ils étaient résolus, permettraient d'avoir une vision globale du chaos. Les conjectures de Palis sont des énoncés mathématiques précis, nécessairement techniques, qui reprennent un certain nombre d'idées présentées dans ce film :

- ◇ un champ de vecteurs *typique* devrait avoir la propriété qu'il ne possède qu'un nombre fini d'attracteurs ;
- ◇ une condition initiale *typique* devrait être attirée par l'un de ces attracteurs ;
- ◇ à chaque attracteur, devrait être associée une mesure SRB qui décrit la statistique asymptotique des trajectoires *typiques* qu'elle attire.

Tout un groupe de mathématiciens s'attaquent énergiquement à ces conjectures et semblent les résoudre, en ce moment, petit bout par petit bout, méthodiquement. Mais il reste encore beaucoup de travail...



Aujourd'hui, on ne pense plus au déterminisme comme l'évolution d'une trajectoire individuelle, mais bien plus comme tout un ensemble en évolution collective. La sensibilité aux conditions initiales des trajectoires est compensée par une sorte de stabilité statistique de tout un ensemble. Cette image est-elle trop optimiste ? L'avenir le dira.

Commentaires du chapitre IX

Il y a beaucoup de sortes de dynamiques.
Certaines sont compliquées,
d'autres non.

Observons ce champ de vecteurs dans l'espace
qui dépend d'un paramètre a.
Commençons par choisir $a = 0,3$
et observons le futur d'un grand nombre
de conditions initiales.
Après un certain temps,
elles sont toutes tombées sur une trajectoire périodique.
Aucun chaos là-dedans.
Bien sûr, il y a une mesure SRB
puisque tout le monde se met à la longue
à tourner bravement sur une courbe fermée.

Faisons évoluer lentement le paramètre a.
Regardez, pour $a = 0,335$,
la trajectoire périodique est dédoublée.
Toujours pas de chaos mais une trajectoire périodique

deux fois plus longue.

Et puis pour $a = 0,380$,
la trajectoire est quadruple.
Et puis les choses s'accélèrent.
Pour $a = 0,405$,
le régime est devenu compliqué et chaotique.
Mais ce qui est étonnant,
c'est que si l'on continue
à augmenter le paramètre a,
parfois, sans prévenir,
la dynamique chaotique redevient simple :
elle se réduit à nouveau
à une trajectoire périodique.

Comment comprendre ces bifurcations ?
Quel est le comportement
le plus fréquent dans la nature ?
Chaotique ? Non chaotique ?
Ce n'est pas clair du tout !
Pendant des siècles,
on n'avait pas pensé
que le chaos pourrait exister
et, aujourd'hui, on le voit partout.

Pour chaque valeur de a,
on observe la trace de l'attracteur sur un plan.
On la dessine en rouge.
Quand le paramètre a varie,
cela produit une dentelle qu'on appelle
un diagramme de bifurcation.
Joli... mais pas facile à comprendre !

Voici encore d'autres dynamiques.
Bien sûr, le mathématicien cherche
à établir des résultats qui sont toujours valables.
Mais bien souvent,
il commence par observer des exemples.
Son espoir est alors
que ce qu'il voit sur un exemple simple
pourrait être réalisé en toute généralité.

Reprenons l'idée de Lorenz,

Sinaï, Ruelle, Bowen : SRB.
La proportion du temps passé
dans une boule par une trajectoire
converge vers une limite
indépendante de la condition initiale.
Est-il raisonnable d'espérer
que ceci puisse être toujours vrai ?
Ça serait trop beau !
Hélas non, comme nous allons le voir
sur un tout petit exemple
découvert par Bowen.

Observez ce champ de vecteurs dans le plan.
Vous y voyez trois positions d'équilibre.
Une trajectoire démarre.
Après un certain temps,
elle s'approche d'une position d'équilibre,
puis d'une autre.
Quand on s'approche d'un équilibre,
on ralentit et on reste un certain temps
dans son voisinage.
Ensuite, on repart vers l'autre équilibre.
Et on y reste encore plus longtemps.
Puis, on revient encore, encore plus près
du premier équilibre,
et on y reste encore plus longtemps, etc.

Alors, voici un petit disque vert
et observons le temps de passage dans ce disque.
Eh bien, pendant de très longues périodes,
on y reste, si bien que la proportion
du temps passé à l'intérieur est proche de 100%.
Puis on le quitte très, très longtemps
et la proportion chute à une valeur proche de 0.
Puis elle remonte près de 100%, puis elle rechute, etc.
Vous voyez, il n'y a aucune convergence.
Il n'a pas de mesure de Sinaï-Ruelle-Bowen.

Alors que faire ?
Abandonner cette idée ?
Dire que Lorenz s'est trompé ?
Eh bien non !
Il faut comprendre que l'exemple
que nous venons de voir est très particulier.

Si l'on modifie un tout petit peu
le champ de vecteurs comme ceci,
le nouveau champ ne pose plus de problème.
Les nouvelles trajectoires
voyagent dans le plan et finissent
par s'approcher d'une trajectoire périodique,
si bien que statistiquement,
tout se comporte périodiquement.
On a bien une mesure de Sinaï-Ruelle-Bowen.

Alors il faut plutôt se demander
si ces mesures ne se présentent pas,
non pas pour toutes les dynamiques,
mais pour presque toutes ?

Mais là encore, il faut modérer
notre enthousiasme.
Observez ce champ de vecteurs.
Voici une trajectoire.
Tout va bien, elle s'accumule
sur un papillon, comme nous l'avons vu.
Si la condition initiale se déplace
lentement sur l'axe bleu,
tout continue pour le mieux.
La trajectoire s'accumule sur le même attracteur,
même s'il faut un certain temps pour y arriver.
Et on pourrait s'assurer que la statistique
est toujours la même.

Mais tout à coup, sans prévenir, surprise !
Les trajectoires vont s'accumuler ailleurs,
sur un autre attracteur
qui n'a rien à voir avec le premier.
On constate que l'espace semble
décomposé en deux régions :
si on part d'un point de la première région,
on s'accumule sur le premier papillon
et si on part de la deuxième région,
on va sur l'autre.

Autrement dit, on ne peut pas dire
qu'il y a une mesure SRB puisque
la statistique limite dépend de la condition initiale.

Mais on dit qu'il y en a deux !
Pour certaines conditions initiales,
la statistique suit la première
et, pour d'autres, la seconde.

Dans les années 1990,
le mathématicien brésilien Jacob Palis
a formulé tout un ensemble de problèmes qui,
s'ils étaient résolus,
permettraient d'avoir une vision globale du chaos.
L'un d'entre eux consiste à affirmer
que la situation que nous venons de rencontrer
devrait être typique.
Dans toutes les dimensions,
un champ de vecteurs typique
devrait avoir la propriété qu'il ne possède
qu'un nombre fini d'attracteurs.
Une condition initiale typique devrait
être attirée par l'un de ces attracteurs.
À chaque attracteur, devrait être associée
une mesure de Sinaï-Ruelle-Bowen
qui décrit la statistique asymptotique
des trajectoires typiques qu'elle attire.

Tout un groupe de mathématiciens
s'attaquent énergiquement à ces conjectures
et semblent les résoudre, en ce moment,
petit bout par petit bout,
méthodiquement...
Une image globale semble émerger.
Cette image est-elle trop optimiste ?
L'avenir le dira !

Aujourd'hui, on ne pense plus
au déterminisme comme l'évolution
d'une trajectoire individuelle,
mais bien plus comme tout un ensemble
en évolution collective.
La sensibilité aux conditions initiales des trajectoires
est compensée par une sorte
de stabilité statistique de tout un ensemble.

Buffon, en 1783,
n'avait-il pas pressenti cela
en écrivant cette magnifique phrase
qui montre un monde tout à la fois
chaotique et complexe,
un monde qu'il faut appréhender dans sa globalité.

« Tout s'opère,
parce qu'à force de temps tout se rencontre,
et que dans la libre étendue des espaces
et dans la succession continue du mouvement,
toute matière est remuée,
toute forme donnée,
toute figure imprimée ;
ainsi, tout se rapproche ou s'éloigne,
tout s'unit ou se fuit,
tout se combine ou s'oppose,
tout se produit ou se détruit
par des forces relatives ou contraires,
qui seules sont constantes,
et se balançant sans se nuire,
animent l'Univers
et en font un théâtre de scènes
toujours nouvelles,
et d'objets sans cesse renaissants. »